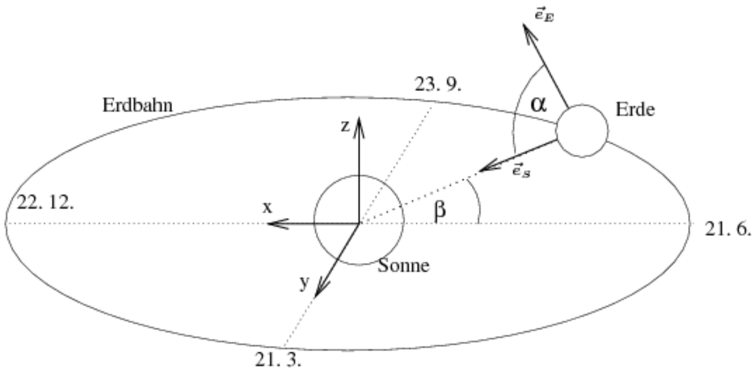
Astronomische Sonnenscheindauer

I Die einfache Variante

1. Näherungen: Die Erde bewegt sich auf einer Kreisbahn (recherchiere im Internet: große und kleine Halbachse: a, b)
   Berechne den mittleren Abstand $(a+b)/2 = r_{av}$; $(a - r_{av})/a$ in Prozent Die Sonne wird als Punkt angenommen (Auswirkung auf Sonnenauf- und Sonnenuntergang)



2. Sei n der n-te Tag im Jahr. Berechne β in Abhängigkeit von n !

$$\beta = (n - 172) \cdot \frac{360°}{365}$$

3. Die Erdachse bildet mit der Ekliptik einen Winkel von $\alpha_0 = 66,5°$! Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{e}_E$ im angegebenen Koordinatensystem !

$$\vec{e}_E = (\cos\alpha_0 | 0 | \sin\alpha_0)$$

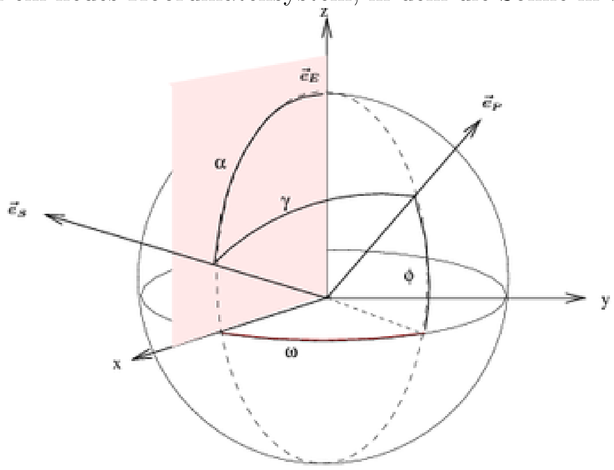
4. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{e}_S$ im angegebenen Koordinatensystem !

$$\vec{e}_S = (\cos\beta | \sin\beta | 0)$$

5. Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{e}_E$ und $\vec{e}_S$!

$$\alpha(n) = \arccos(\cos\alpha_0 \cdot \cos\beta(n))$$

6. Wir betrachten nun ein neues Koordinatensystem, in dem die Sonne in π_3 steht !



7. Jeder Punkt der Erdoberfläche dreht sich in diesem Koordinatensystem täglich einmal auf einem Kreis um die z-Achse herum. Genau um 12 Uhr Mittag (Ortszeit) durchquert er π_3 . Die Koordinatendarstellung von $\vec{e}_S$ in diesem KS ist :

$$\vec{e}_S = (\sin\alpha|0|\cos\alpha)$$

8. Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt P (mit geografischer Breite ϕ und Länge ω) . wie lautet der Einheitsvektor vom Erdmittelpunkt durch P:

$$\vec{e}_P = (\cos\phi\cos\omega|\cos\phi\sin\omega|\sin\phi)$$

9. Falls der Winkel $\gamma = 90°$ geht die Sonne in P unter. ω ist daher die Zeit zwischen Mittag und Sonnenuntergang, wobei 2π 24 Stunden entsprechen. Die Zeit zwischen Sonnenauf- und Sonnenuntergang ist daher $2 \cdot \omega$! Also:

$$\vec{e}_P \cdot \vec{e}_S = 0 \Rightarrow \omega$$

10. Geben Sie nun die astronomische Sonnenscheindauer T_A als Funktion von ϕ und n an:

$$T_A = \frac{24}{\pi}\arccos\left(-\tan\phi\cot\alpha(n)\right)$$

Für $\alpha(n)$ ist natürlich obige Formel einzusetzen. Wir können nun diese Formel in Geogebra (mit Schieberegler für ϕ und n) veranschaulichen!

II Die genauere Variante

Wir weichen jetzt von der gleichgörmig durchlaufenen Kreisbahn der Erde ab und berücksichtigen die elliptische Bahn, die Sonne ist in einem Brennpunkt - es existiert ein Perihelion und Aphelion. Allerdings berücksichtigen wir keine Periheldrehung(0,3 Grad pro Jahrhundert). Das Perihel liegt in den nächsten hundert Jahren am 2. Jänner. Außerdem zeigt die Erdachse auf der Nordhalbkugel auf Polaris - was sich ebenfalls langsam ändert, da die Erde einen Kreisel darstellt auf dem die Sonne ein Drehmoment ausübt (Präzession eines Kreisels).

Bevor wir zu rechnen beginnen ein paar Vorbemerkungen:

Die Sonnenzeit (zum Unterschied von UTC oder nach welchen Konventionen sich die Zeiger der Uhren auch drehen) orientiert sich an der Dauer der scheinbaren Umdrehung der Sonne um die Erde. Natürlich wäre es nützlich, wenn die Zeiger der Uhren auch mit der Sonne verknüpft wären:

12 Uhr sollte irgendwie mit "High Noon" (Sonnenhöchstand) korespondieren.

Dies wird dadurch erreicht, dass man am Himmelsäquator eine gleichförmig umlaufende Sonne annimmt ("Mittlere Sonne", "Mean Sun"), die in den Äquinoxen mit der 1. fiktiven Sonne (in der Ekliptik gleichförmig umlaufende Sonne, die in Perihel und Aphel mit wahrer Sonne übereinstimmt) übereinstimmt. Einen Umlauf der Mittleren Sonne definieren wir als genau 24 Stunden. Greifen auf der Erde jeden 15-ten Meridian heraus und wenn die Sonne dort ihren Höchststand erreicht, ist es 12 Uhr Mittags auf unserer Uhr. (Ausnahmen: Sommerzeiten (z.B.: CEST = Central Europaean Summer Time), nicht berücksichtigt sind hier auch die Gezeitenkräfte von Mond und Sonne, die den Umlauf der Erde langfristig einbremsen). So das zeigen unsere Uhren an.

Als wahrer Sonnentag wird die Zeitdauer zwischen zwei Meridiandurchgängen der Sonne bezeichnet, lax ausgedrückt also "von Mittag zu Mittag". In Wahrheit spiegelt sich in dieser Bewegung nur die Drehung der Erde um sich selbst. Weil allerdings im Laufe eines Tages die Erde auch einen beträchtlichen Teil ihres Umlaufs um die Sonne zurücklegt, dauert eine vollständige Erddrehung bezüglich der Sonne länger als eine vollständige Drehung bezüglich der Sterne. Daher ist ein wahrer Sonnentag auch um etwa 4 Minuten länger als ein Sterntag. Der Bezugspunkt der wahren Sonnenzeit kann auch wieder durch den Stundenwinkel ausgedrückt werden. Allerdings soll die Uhrzeit beim Meridiandurchgang der Sonne 12 Uhr betragen, daher ergibt sich die wahre Sonnenzeit als Stundenwinkel der Sonne plus 12 Stunden.

Eine Sonnenuhr zeigt die wahre Sonnenzeit an.

Die Dauer des wahren Sonnentages variiert aber jahreszeitlich. Das ist eine Folge sowohl der Exzentrizität der Erdbahn als auch der Schiefe der Ekliptik (die Schrägstellung der Erdachse). Zum einen werden nach dem zweiten Keplerschen Gesetz (dem Flächensatz) verschiedene Teile der ellipsenförmigen Erdbahn unterschiedlich schnell durchlaufen, so daß auch die Sonne sich unterschiedlich schnell zwischen den Sternen bewegt.

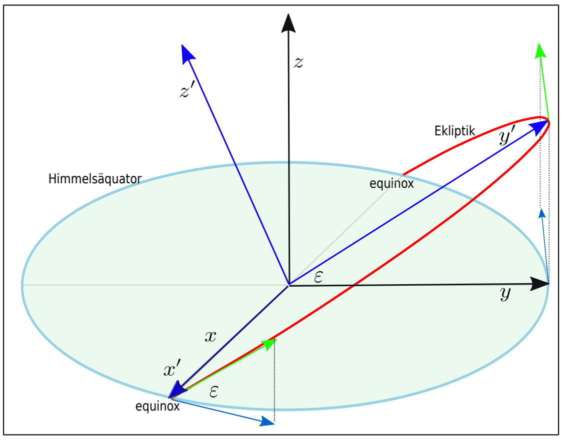


Abb.1 : Ekliptik und Himmelsäquator

Zum anderen würde aber auch bei exakter Kreisform der Erdbahn sich die Sonne nur gleichförmig auf der Ekliptik bewegen, nicht aber ihre Projektion auf den Himmelsäquator. Im Frühjahr und im Herbst bewegt sich die Sonne in der Nähe der Schnittpunkte zwischen Ekliptik und Himmelsäquator. Ihre Bewegung von Tag zu Tag verläuft daher schräg zum Himmelsäquator, die auf den Äquator projizierte Bewegung ist folglich reduziert. Im Sommer und Winter hingegen bewegt sich die Sonne nahe den Scheitelpunkten der Ekliptik und damit parallel zum Äquator, wodurch ihre projizierte Geschwindigkeit groß ist.

Wir zeigen zuerst einmal, dass wie aus der Abbildung bereits "zeichnerisch" hervorgeht: Die Projektion der Bewegung der ersten fiktiven Sonne - die sich gleichförmig in der Ekliptik bewegt - ist nicht mehr gleichförmig!

Im gestrichenen Koordinatensystem K' ist der Richtungsvektor zur fiktiven Sonne gegeben durch

$$\vec{z}_{K'} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } t = 2\pi \text{ einem Jahr entspricht}$$

die Umrechnung geschieht mit

$$\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varepsilon \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Bahn in K:

$$\vec{z}_K = \cos t \cdot \vec{e}_1{}' + \sin t \cdot \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cos\varepsilon \\ \sin t \sin\varepsilon \end{pmatrix}$$

der Tangentialvektor ergibt sich zu

$$\vec{v}_K = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \cos\varepsilon \\ \cos t \sin\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}_K| = 1 = const$$

während der Betrag des projizierten Geschwindigkeitsvektors sehr wohl zeitabhängig ist:

$$\vec{z}_{K,p} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cos\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{K,p} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \cos\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |v_{K,p}(0)| = \cos\varepsilon \quad \Rightarrow |v_{K,p}(\pi/2)| = 1$$

Also wie oben gesagt, in der Nähe der Äquinoxen (Frühling, Herbst $t \approx 0$ bzw. $t \approx \pi$) ist die projizierte Geschwindigkeit wesentlich geringer als in der Nähe der Sonnenwenden(Sommer, Winter)

Obige Rechnung lässt sich auch mit Koordinatentransformationen durchführen:

Und zwar geschieht der Übergang von K' nach K durch Rotation um $-\varepsilon$ um die x-Achse. Da KS-Transformationen invers zu Punkttransformationen sind, hebt sich das Minuszeichen wieder auf:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\vec{z}_K = R_x \vec{z}_{K'} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cos \varepsilon \\ \sin t \sin \varepsilon \end{pmatrix}$$

Der Rest kann wie oben durchgeführt werden. (Über Rotationsmatrizen)

Beide Effekte haben letztlich zur Folge, das die genaue Länge der etwa 4 minütigen Korrektur zum Sterntag schwankt. Die Schiefe der Ekliptik hat dabei den etwas größeren Einfluß. Um auf eine gleichmässiger ablaufende Zeitskala zu kommen, definiert man eine fiktive "mittlere Sonne" (mean sun). Diese braucht für einen Umlauf von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt genauso lange wie die wahre Sonne, soll sich aber gleichförmig auf dem Himmelsäquator bewegen. Mittlere Sonnenzeit ist dementsprechend der Stundenwinkel der mittleren Sonne plus 12 Stunden. Der Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit wird als Zeitgleichung bezeichnet. Wegen der Überlagerung zweier Effekte mit unterschiedlicher Periodenlänge (die Exzentrizität der Erdbahn bewirkt eine Periode von einem Jahr, die Schiefe der Ekliptik von einem halben Jahr) ergeben sich pro Jahr zwei Minima und zwei Maxima der Zeitgleichung:

```
~ 11.Feb    ~  14.5 min
~ 14.Mai    ~     4 min
~ 26.Jul    ~   6.4 min
~  3.Nov    ~  16.3 min
```

Die Zeitgleichung bewirkt auch asymmetrische Verschiebungen von Sonnenauf- und -untergangszeiten. So findet z.B. der früheste Sonnenuntergang nicht bei der Wintersonnenwende am 22.Dez. statt, sondern etwa 11 Tage zuvor. Der späteste Sonnenaufgang kommt dagegen rund 10 Tage nach der Wintersonnenwende. Aus demselben Grund sind Vor- und Nachmittag auch bei den Tag- und Nachtgleichen am 21.März und 23.September nicht gleich lang.

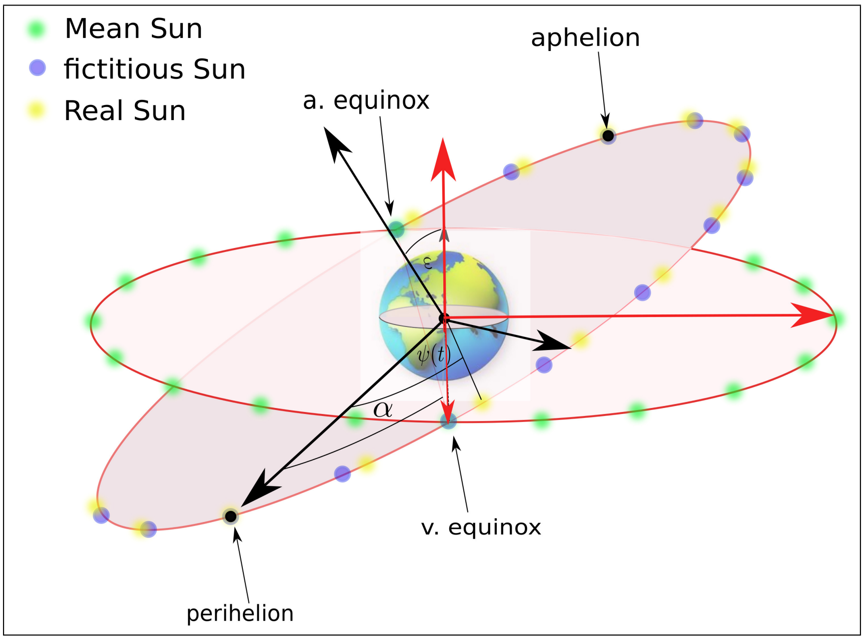


Abb. 2: Drehung der Koordinatensysteme

Also halten wir fest:

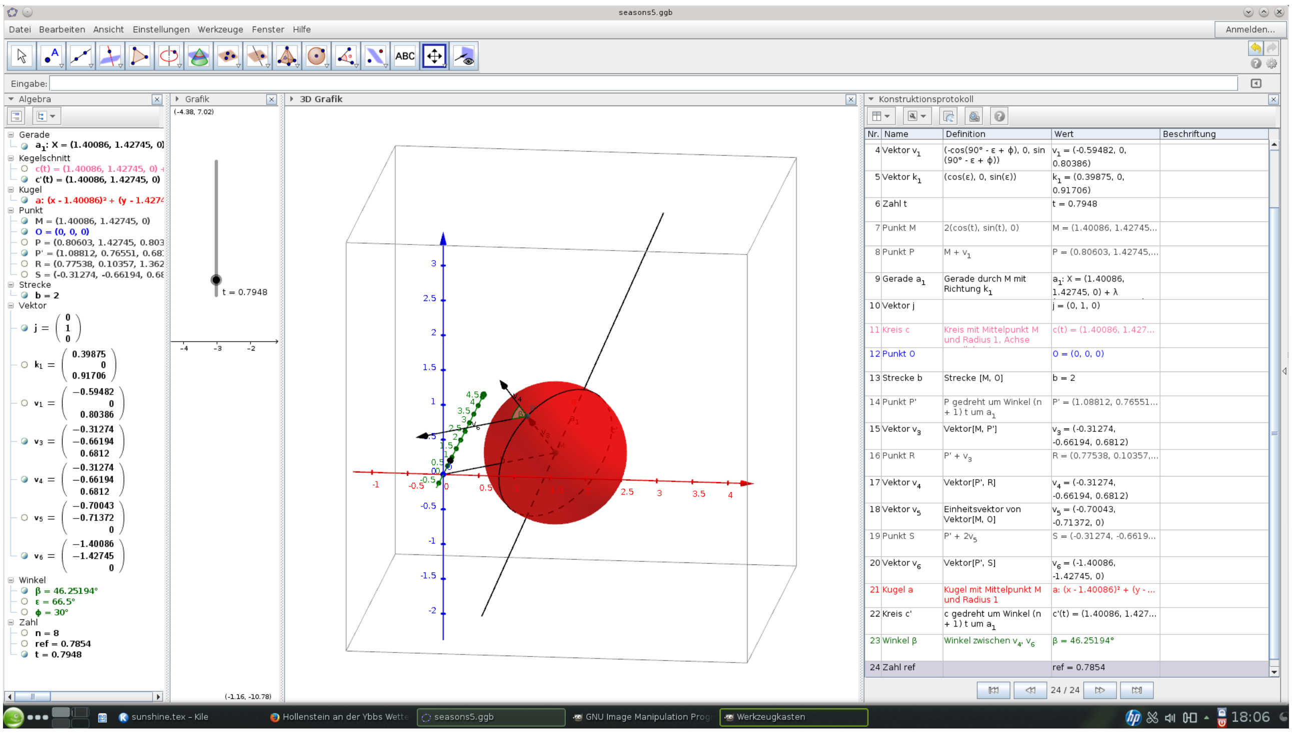
> Will man von einer Sonnenuhr die “Uhrzeit” ablesen muss man einige Korrekturen anbringen (und zwar nicht nur Längengradabstand zum nächsten zeitbestimmenden Meridian), sondern etwas komplexere - sie heißen **Zeitgleichung** (und haben damit zu tun, auf welcher Position der Erdumlaufbahn man sich befindet und mit der “Schiefstellung” der Erdachse = Neigung der Ekliptik)

1 Schiefstellung der Erdachse - heliozentrisch

Koordinatensystem: Sonne im Ursprung, Ekliptik in x-y-Ebene, Wintersonnenwende bei x-Achse.

Vereinfachungen: gleichförmiger Umlauf (keine “Keplerstörung” - diese Korrektur fordert eigenes Kapitel), nur 8 Tage im Jahr (ist leicht zu korrigieren)

Sehen wir uns diese vereinfachte Simulation in Geogebra an, die nur die Schiefstellung der Erdachse betrifft! Der Mittelpunkt der Erde M bewegt sich also mit $R(\cos t, \sin t, 0)$ - Schieberegler t entspricht der Zeit, wobei 2π rad 365×24 Stunden entsprechen (wobei der 365-er ungenau ist wie wir wissen). Hier einmal das eingefrorene Bild:



Zum Konstruktionsprotokoll:

1. In den ersten 3 Punkten werden n (Anzahl der Tage im Jahr), ε (Erdachsenneigung) und ϕ (geograf. Breite des Punktes am Meridian). Letztere spielt übrigens keine Rolle wie der Artikel beweist. Aber irgendeinen Punkt muss man ja rausgreifen - hier Breite 30°-Nord.

2. v_1 ist der Orts-Einheitsvektor zum Punkt P, k_1 der Orts-Einheitsvektor der Erdachse (zur Wintersonnenwende - 22. Dez.)

3. t Schieberegler für die Zeit ($2\pi \mathrel{\widehat{=}} 365 \cdot 24 \cdot 60$Minuten)
4. Mittelpunkt M der Erde mit gleichmäßigem Umlauf im Abstand 2 (willkürlich - spielt keine Rolle). Start bei der x-Achse (Wintersonnenwende)
5. Punkt P (siehe oben) auf dem Meridian m_1, der zur Wintersonnenwende Sonnenhöchstand hat.
6. Erdachse, Einheitsvektor in y-Richtung ($\vec{j}$)
7. m_1 (siehe oben): Kreis c mit Mittelpunkt M, Richtungsvektor $\vec{j}$ und Radius 1
8. Ursprung O und Strecke MO
9. Jetzt wichtig P' : P gedreht um die Erdachse um den Winkel $(n+1) \cdot t$ (um 8 Tage zu erreichen müssen wir 9-mal drehen, weil 1 Drehung verliert wegen Erdumlauf)
10. Dasselbe im Punkt 22 des Konstruktionsprotokolls mit dem Meridian c
11. Jetzt messen wir den Winkel zwischen $\overrightarrow{MO}$ und $\overrightarrow{MP'}$ - dieser Winkel soll ein Minimum werden für Sonnenhöchstand
12. Die restlichen Schritte im Konstruktionsprotokoll sind nur dazu da diesen Winkel β im Punkt P' einzuzeichnen!

Aber jetzt sehen wir uns an, wie die Schiefstellung der Erdachse die tatsächliche Tageslänge beeinflusst. Wir laden die Geogebra-Datei herunter. Wir vergrößern t solange bis der 1. Tage zu Ende ist (grob mit der Maus, Feineinstellung mit Cursortasten). Dies passiert bei:

$$\beta = 46.25194° \qquad t = 0.7948$$

Ich habe als Referenz $\pi/4 = ref = 0.7854$ zu den Konstanten hinzugefügt - man sieht der Sonnentag dauert länger als "unsere Uhr" anzeigt - unsere Uhr geht gegenüber einer Sonnenuhr **vor**. Bei $\pi/2$ stimmen sie wieder überein, dann geht sie nach usw. Der Unterschied beträgt

$$0,0094\, rad \quad \widehat{=} \quad 0,0094 * 8 * 24 * 60/(2*\pi)\, min = 17.2345704775351\, min$$

Zur Kontrolle jetzt die Rechnung in *wxMaxima*:

```
(%i1)   load(vect)$  ratprint:false$

        ε - Schiefstellung der Erdachse
(%i3)   %epsilon:66.5*%pi/180,numer$

        θ - geograf. Breite des rotierenden Punktes
(%i4)   %theta:%pi/6$

(%i5)   /* Tage im Jahr: */ n:8$

        Funktion liefert Spaltenvektor in homogenen Koordinaten
(%i6)   colVec(v):=matrix([v[1]],[v[2]],[v[3]],[1])$

        Erstellt Translationsmatrix für Verschiebung um v⃗
(%i7)   mk_translation(v):=addrow(addcol(diagmatrix(3,1),[v[1],v[2],v[3]]),[0,0,0,1])$

        kartesische Basisvektoren
(%i8)   e[1]:[1,0,0]$e[2]:[0,1,0]$e[3]:[0,0,1]$

        Basisvektoren im "gestrichenen" System für Rotation um beliebige Achse → Siehe Link
(%i11)  e_s[1]:[cos(%epsilon),0,sin(%epsilon)]$  e_s[2]:[0,1,0]$  e_s[3]:express(e_s[1] ~ e_s[2])$

        Hilfsfunktion zur Konstruktion der Transformationsmatrix ins gestrichene System K'
(%i14)  h[i,k]:=e_s[i] . e[k]$
```

Mittelpunkt der Erde

(%i15)
```
M:2*[cos(t),sin(t),0]$
```

Einheitsvektor von M zum Punkt P (geograf. Breite 30° und hat zur Wintersonnenwende "Mittag"

(%i16)
```
v_1:[-cos(%pi/2 -%epsilon+%theta),0,sin(%pi/2 -%epsilon+%theta)], numer$
```

P wird erzeugt

(%i17)
```
P:M + v_1,numer$
```

Die Verschiebungsmatrix V für M wird erzeugt

(%i18)
```
V:mk_translation(M),numer;
```

(%o18)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\cos(t) \\ 0 & 1 & 0 & 2\sin(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Funktion liefert Inverse einer Verschiebungsmatrix

(%i19)
```
inv_transl(A):=block([M:copymatrix(A)],
for i thru 3 do M[i,4]:-M[i,4],
M)$
```

Invertierung wird auf V angewendet

(%i20)
```
V_inv:inv_transl(V)$
```

Funktion, die Matrix A in "homogene" Matrix konvertiert

(%i21)
```
mk_hom(A):=addrow(addcol(A,[0,0,0]),[0,0,0,1])$
```

Transformationsmatrix in K' wird erzeugt

(%i22)
```
A:mk_hom(genmatrix(h,3,3))$
```

inverse Matrix $A^{-1} = A^t$ wird erzeugt

(%i23)
```
A_t:transpose(A)$
```

Rotationsmatrix (homogen) um x-Achse: R_x (Beachte: zusätzliche Rotation $(n+1)$)

(%i24)
```
R_x:mk_hom(matrix([1,0,0],
            [0,cos((n+1)*t),-sin((n+1)*t)],
            [0, sin((n+1)*t),cos((n+1)*t)]  ))$
```

Gesamttransformation wird erzeugt : T = Verschiebung nach M, neues KS K', Rotation und zurück!

(%i25)
```
T:ratsimp(V . A_t . R_x . A . V_inv),numer$
```

P' als homogener Vektor wird berechnet (P rotiert um Erdachse)

(%i26)
```
P_s:T . colVec(P),numer$
```

M' als homogener Vektor wird berechnet

(%i27)
```
M_s:ev(colVec(M))$
```

$\overrightarrow{M'P'}$ wird berechnet - beachte 4. Koordinate verschwindet

(%i28)
```
MP:ev(P_s - M_s),numer$
```

Einheitsvektor in Richtung Sonne(S) - beachte 4. Koordinate verschwindet

(%i29)
```
M_0:-0.5*(M_s - colVec([0,0,0]))$
```

Funktion $f(t)$, die jedem Zeitpunkt Winkel zwischen $\overrightarrow{M'P'}$ und $\overrightarrow{MS}$ zuordnet

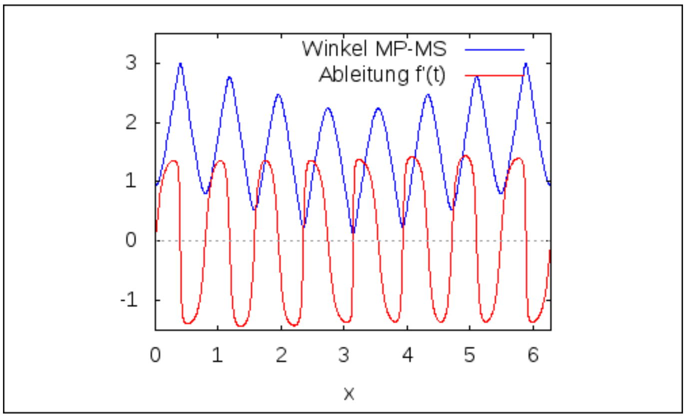
(%i30)
```
define(f(t),acos(M_0 . MP))$
```

Ableitung $f'(t)$ für Bestimmung der Minima (roots)

(%i31)
```
define(f_s(t),0.2*diff(f(t),t,1))$
```

Bei Minima von $f(t)$ ist Sonnenhöchststand = Mittag

(%i32)
```
wxplot2d([f(x),f_s(x)],[x,0,2*%pi],[y,-1.5,3.5],
[legend,"Winkel MP-MS", "Ableitung f'(t)"])$
```

(%t32) 

numerische Berechnung des 1. Minimums und Vergleich mit Geogebra!

(%i33)
```
rt1:find_root(f_s(x),x,0.7,0.9);
```

(%o33) 0.7948156246676737

Wert des 1. Minimums

(%i34)
```
angle_min:f(rt1)*180/%pi,numer;
```

(%o34) 46.25193992924053

Finde alle Minima bzw. (auskommentiert) Differenzen zu Uhrzeit (noon-watch)

(%i35)
```
findMins(days):=block([mins:[],noons:[], day:2*%pi/n],
  for d thru days do (
    mins:cons(find_root(f_s(x),x,d*day-day/20,d*day+day/20),mins),
    noons:cons(d*day,noons)
  ),
/*reverse(noons - mins)*/
reverse(mins)
)$
```

Liste der Uhrzeit für Mittag

(%i36)
```
noon_watch:makelist(2*%pi/n*i,i,1,n);
```

(%o36) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\,\pi}{4},\pi,\frac{5\,\pi}{4},\frac{3\,\pi}{2},\frac{7\,\pi}{4},2\,\pi]$

Wann auf der Uhr ist Mittag?

(%i37)
```
noon_sun:findMins(n), numer;
```

(%o37) $[0.7948156246676737, 1.57431194190139, \ldots]$

Abweichungsliste

(%i38)
```
deviations:noon_watch-noon_sun, numer$
```

Abweichungen in Minuten umrechnen

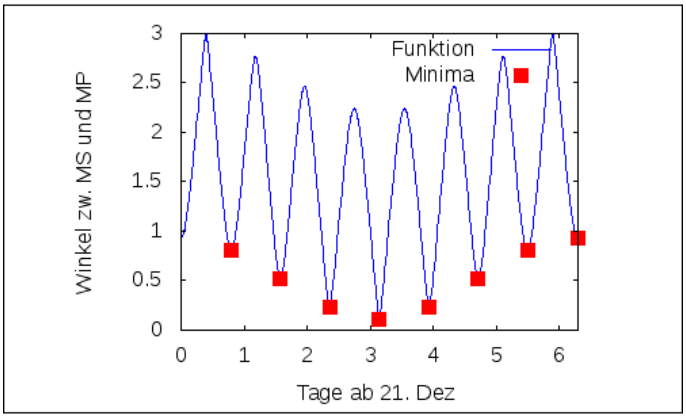
(%i39)
```
deviations_in_minutes:n*24*60*1/(2*%pi)*deviations, numer$
```

alle Minima - Liste $(t, f(t))$ - diskreter Graph

(%i40)
```
w1:makelist([noon_sun[i], f(noon_sun[i])],i,1,n),numer$
```

Wir plotten alles zusammen

(%i41)
```
wxplot2d([f(x),[discrete,w1]] ,[x,0,6.29],[xlabel,"Tage ab 21. Dez"],
[ylabel,"Winkel zw. MS und MP"],[legend,"Funktion", "Minima"],
[style,lines,points]);
```

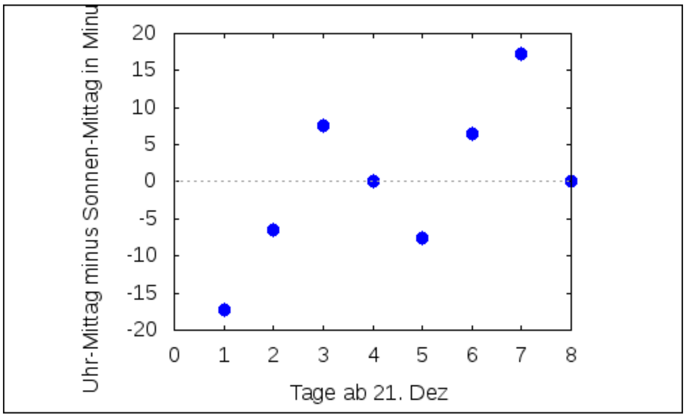
(%t41) 

(%o41)

Liste für $(Tage, Abweichung)$ und Graph zeichnen

```
(%i42) w2:makelist([i, deviations_in_minutes[i]],i,1,n)$

(%i43) wxplot2d([discrete,w2] ,[x,0,n],[xlabel,"Tage ab 21. Dez"],
         [ylabel,"Uhr-Mittag minus Sonnen-Mittag in Minuten"],[legend,""],
         [style,points]);
```

(%t43) 

(%o43)

Wir haben also gezeigt:

1. Die Simulation in Geogebra und Berechnung für $n = 8$ stimmen überein - es kommt zu einer Mittagverschiebung
2. Die Rechnung in wxMaxima ist leicht erweiterbar:
   - $n : 8$ braucht nur durch $n : 365$ ersetzt werden und
   - $M(\cos t, \sin t, 0)$ müssen wir ersetzen durch $M(\cos\psi(t), \sin\psi(t), 0)$ wobei $\psi(t)$ noch zu bestimmen ist, aber es gilt sicher:

$$\psi(t) \approx t \quad \psi(\pi) \approx \pi \quad \psi(2\pi) \approx 2\pi \quad \text{wenn wir den Ursprung ins Perihel legen}$$

Hier noch der Link zur wxMaxima-Datei

2 Ekliptik - Mittag genauer betrachtet

Im vorigen Kapitel haben wir die Funktion

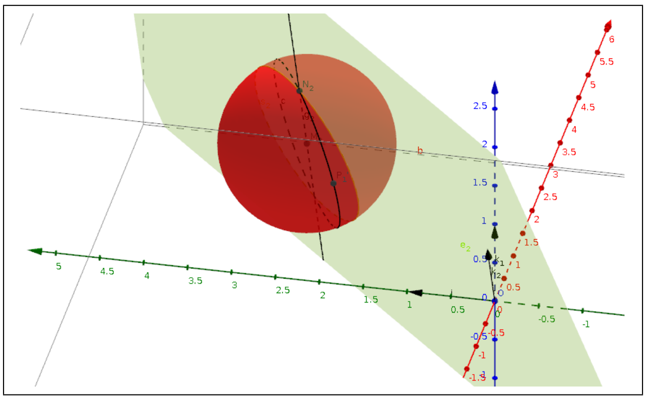
$$f(t) := \angle(\overrightarrow{MP'}, \overrightarrow{P'S}) \qquad \text{P' rotierter Punkt bei } t,\ \text{M Erdmittelpunkt und S Sonne (=Ursprung)}$$

$\overrightarrow{MP'}$ ist der Normalvektor der Tangentialebene in P' - wenn f(t) ein Minimum ist, dann ist Sonnenhöchstand! Das nächste Minimum ist auf der sonnenabgewandten Seite und erst das nächste (in ca. 24 Stunden) zählt wieder. Wir brauchen also von $f(t)$ jedes zweite Minimum bzw. von $f'(t)$ jede zweite Nullstelle.

Genauso könnten wir uns auch für die Sonnenauf- bzw. untergänge interessieren mit

$$f(t) = \frac{\pi}{2}$$

Falls wir nur Mittag betrachten - und das wollen wir jetzt - geht es aber einfacher (wir behalten voerst die 8 Tage im Jahr bei): Unten ist ein Bild, das P_1' kurz vor Mittag zeigt - M sei Position des Erdmittelpunkts, N Nordpol und S Sonne.



Mittag ist, wenn

$$P_1' \in Ebene(M, N, S) \Leftrightarrow d(P_1', Ebene(M, N, S)) = 0$$

also der Abstand von P_1' zu dieser Ebene muss verschwinden. Unsere Ebene besitzt als Aufspannvektoren $\overrightarrow{MN} = \vec{e}_A$ und $\overrightarrow{MS} = -\vec{m}$, wobei $\vec{e}_A$ der Erdachsenvektor ist und $\vec{m}$ der Ortsvektor zu Erdmittelpunkt.
Ein Normalvektor $\vec{n}$ berechnet sich dann

$$\vec{n} = \vec{m} \times \vec{e}_A$$

und es muss also gelten

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{p}_1{}' = 0} \Leftrightarrow P_1' \in Ebene(M, N, S)$$

Hier die Geogebra-Datei

3 Position der wahren Sonne $\psi(t)$

Polarform einer Ellipse mit den Halbachsen a und b (wobei $a > b$) mit Koordinatenursprung im Brennpunkt (Sonne). Für den Polarwinkel ψ gilt die Entsprechung $2\pi \widehat{=} 365,249 \cdot 24$ Stunden

$$r(\psi) = \frac{a^2 - \kappa^2}{a + \kappa cos(\psi)}$$

$\kappa = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ist dabei die numerische Exzentrizität und ist ein Maß (wie der Name sagt) für die Abweichung von einem Kreis - es ist die Länge, die die beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse entfernt sind im Verhältnis zur grßen Halbachse, klarerweise gilt $\kappa \in [0, 1]$ und ist dimensionslos

Für die Erdbahn gilt (mit obigen Vorbehalten): $\kappa = 0,016722$, $\alpha = 78,5°$ und $\epsilon = 23,45°$

Die Fläche A ergibt sich mit obigen Einheiten

$$\kappa = \sqrt{1 - b^2} \Rightarrow b = \sqrt{1 - \kappa^2} \Rightarrow A = ab\pi = \pi\sqrt{1 - \kappa^2}$$

Übrigens der kleine Wert von κ zeigt, dass unsere obige Näherung so schlecht nicht war - aber wie die obere Tabelle zeigt, eine Viertelstunde kann man schon daneben liegen, dazu kommt natürlich noch der Abstand vom "zeitgebenden Längengrad".

Wenden wir zuerst Kepler an: Der Flächenzuwachs vom Radiusvektor pro Zeit soll konstant sein! Also

$\dot{A}(t) = c \Rightarrow A(t) = c \cdot t + c_1$ mit den Randbedingungen $A(0) = 0$ und $A(2\pi) = ab\pi$ ergibt sich

$$c_1 = 0 \text{ und } c = \frac{1}{2}\sqrt{1-\kappa^2}$$

also mit Differentialen geschrieben:
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = c = \frac{1}{2}\sqrt{1-\kappa^2}} \tag{1}$$

Erinnern wir uns

$$\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \qquad \text{mit } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i * \Delta x \text{ und } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

genauso lässt sich zeigen, wenn $r(\psi)$ die Polarform einer Kurve darstellt, dass sich der Flächeninhalt ergibt zu

$$A(\psi_1, \psi_2) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[r(\xi_i)\right]^2\,\Delta\psi = \frac{1}{2}\int_{\psi_1}^{\psi_2}\left[r(\psi)\right]^2\,d\psi$$

also mit Differentialen geschrieben:
$$\boxed{\frac{dA}{d\psi} = \frac{1}{2}\left[r(\psi)\right]^2} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) lässt sich über die Kettenregel $\dot{\psi}(t)$ gewinnen:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dA}\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA}{d\psi}\right)^{-1} c = \frac{2}{r^2}c = (1+\kappa\cos\psi)^2\,\underbrace{\left(1-\kappa^2\right)^{-\frac{3}{2}}}_{a}$$

diese Differentialgleichung für ψ gilt es zu lösen:

$$\boxed{\dot{\psi}(t) = a(1+\kappa\cos\psi)^2}$$

Damit die Argumentationslinie nicht durchbrochen wird, habe ich die Diskussion über deren Lösung auf einen anderen Artikel verschoben. Im Folgenden werden wir mit dieser Näherung der Lösung weiterrechnen:

$$\boxed{\psi(t) = t + \underbrace{2\kappa\sin(t) + \frac{5}{4}\kappa^2\sin(2t)}_{\delta(t)} = t + \delta(t) \qquad \text{wobei } \delta(0) = \delta(\pi) = \delta(2\pi) = 0}$$

Es handelt sich also um eine gleichförmige Bewegung (uniform motion) mit einer "Störung".

Berechnen wir diese sich akkumulierende "Störung" mit wxMaxima:

Exzentrizität und Anzahl der Tage im Jahr werden festgelegt

```
(%i1)  k:0.016722$ year:365$
```

Jetzt obige Näherungsformel für $\psi(t)$

```
(%i3) %psi(t):= t+ 2*k*sin(t)+ 5/4*k^2*sin(2*t);
```

(%o3) $$\psi(t) := t + 2\,k\sin(t) + \frac{5}{4}\,k^2\sin(2\,t)$$

Wie groß ist der Unterschied zur gleichförmigen Bewegung?

```
(%i4) define(errorkepler(day),2*%pi/year*day-%psi(2*%pi/year*day))$
```

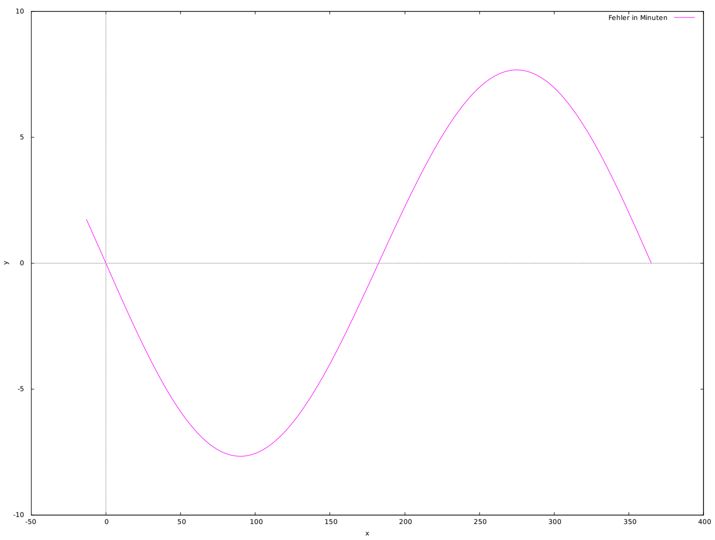
Umrechnung in Minuten und Werteliste (values) erstellen

```
(%i5) v:makelist(24*60*errorkepler(i)/(2*%pi),i,-13, year),numer$
```

Jetzt die Punktliste(points) für das Plotten erstellen

```
(%i6) p:makelist([i,v[i+14]],i,-13,year)$
```

```
(%i7) plot2d([[discrete,p] ],[y,-10,10],
        [style,[lines]], [color, magenta],
        [legend,"Fehler in Minuten"]);
```



Der Graph der Zeitgleichung (**nur die Keplerbewegung betreffend**) ist natürlich

$$t - \psi(t) = 2\kappa\sin(t) + \frac{5}{4}\kappa^2\sin(2t) = \delta(t)$$

wobei t in Jahrestage umgerechnet wird:
Jahrestag n entspricht einem Winkel von $t \,\widehat{=}\, \frac{2\pi}{365}n$
Der Wert wird umgerechnet in Minuten also 2π entsprechen $24 \times 60 \times 365$ Minuten

$$1\,rad \,\widehat{=}\, \frac{60 \times 24 \times 365}{2\pi}\ Minuten$$

Der Fehler schwankt also so zwischen -8 und $+8$ Minuten

In der Nähe des Perihelions (3. Jänner) geht die "Armbanduhr" vor, der Fehler akkumuliert sich und baut sich bis zum Aphelion wieder ab und im nächsten halben Jahr läuft es umgekehrt.

Die Zeitgleichung (Graph) wird nun so angewendet, dass ihr Wert zur "Armbanduhrzeit" addiert wird, um die lokale wahre Sonnenzeit zu erhalten:

Z.B.: Wie groß ist Abweichung am 4. März? gerechnet wird vom 3.Jänner:
28+28+4=60 - dort beträgt der Wert der Zeitgleichung ca. -6.5 Minuten, d.h. um 12Uhr 6.5 Minuten ist Mittag!

4 Transformationen – Verschiedene Koordinatensysteme, verschiedene Sonnen

Wir haben es mit 4 verschiedenen Koordinatensystemen(KSe), auf die wir uns mit Nummmern als Index beziehen

- 1 - Sonne im Ursprung, x-y-Ebene ist die Ekliptik, x-Achse zum Perihel, z-Achse normal zur Ekliptik, sodass sich die Erde im mathematisch positiven Sinn "dreht". In diesem System haben wir oben $\psi(t)$ ermittelt.
- 2 - Alles wie 1, aber Ursprung ist jetzt der Erdmittelpunkt. In Abb. 2 weiter oben ist dieses KS

schwarz eingezeichnet.

- 3 - x-Achse zum Frühlingspunkt, z-Achse durch den Nordpol
- 4 - Rotiert gegenüber 3 um die z-Achse in 24 Stunden

Wir haben die Richtungsvektoren zu den 3 verschiedenen Sonnen

- $\vec{x}_i$ - Positionsvektor zur **wahren Sonne** im i-ten KS
- $\vec{y}_i$ - Positionsvektor zur **fiktiven Sonne** im i-ten KS
- $\vec{z}_i$ - Positionsvektor zur **mittleren Sonne** im i-ten KS