Interferenz - Addition von Wellen

1. Zeige: Addiert man zwei Kräfte mit Betrag F_1 und F_2, die miteinander einen Winkel φ einschließen, so ergibt sich eine Resultierende mit Betrag F_R:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi$$

2. Leite die Additionstheoreme für die cos- und sin-Funktion mit dem skalaren bzw. vektoriellem Produkt von Einheitsvektoren her ($\vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_\beta$)

3. 2 Schwingungen derselben Frequenz, mit verschiedenen Amplituden und einem Phasenwinkel φ werden addiert:

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega t) \qquad und \qquad y_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi)$$

wir fragen uns, ob das wieder eine Schwingung derselben Frequenz ist (mit unbekannter Amplitude A_R und unbekanntem Phasenwinkel φ_R):

$$A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(\omega t + \varphi) = A_R\sin(\omega t + \varphi_R)$$

wir zerlegen mit dem Additionstheorem, heben auf jeder Seite $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ heraus und argumentieren:
wenn für alle Zeiten t die linke und rechte Seite gleich sind, müssen die Koeffizienten übereinstimmen:

I	$A_1 + A_2\cos\varphi = A_R\cos\varphi_R$
II	$A_2\sin\varphi = A_R\sin\varphi_R$

wir lösen dieses Gleichungssystem (welches ist es?) indem wir jede quadrieren und anschl. addieren (dadurch werden wir φ_R los, bzw. die zweite durch die erste dividieren (dadurch werden wir A_R los):

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi \qquad und \qquad \tan\varphi_R = \frac{A_2\sin\varphi}{A_1 + A_2\cos\varphi}$$

werden da Erinnerungen wach?

4. Wir können die Schwingungen y_1 und y_2 als Imaginärteile von komplexen Zahlen auffassen und anstatt nur die Imaginärteile zu addieren (wie oben) gleich die komplexen Zahlen (sonderbarerweise ist das sogar leichter):

$$y_1(t) = A_1e^{i\omega t} \qquad und \qquad y_2(t) = A_2e^{i\omega t + \varphi}$$

die Addition führt auf:

$$y_1 + y_2 = e^{i\omega t}\cdot\underbrace{(A_1 + A_2e^{i\varphi})}_{\in\mathbb{C}} = e^{i\omega t}(A_R\cdot e^{i\varphi_R})$$

beachten Sie, dass es ganz selbstverständlich ist, dass das Ergebnis wieder eine Schwingung derselben Frequenz ist:

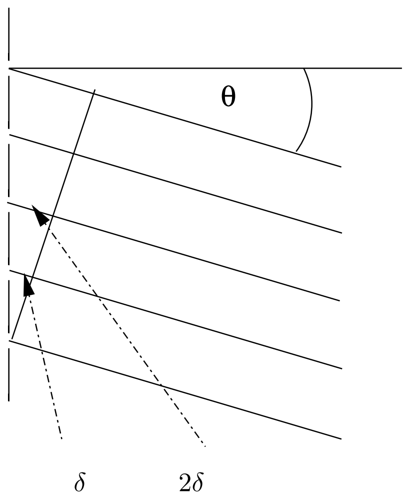
$$A_R^2 = (A_1 + A_2e^{i\varphi})\cdot\overline{(A_1 + A_2e^{i\varphi})}$$

Ist konjugiert komplex linear? – d.h. kann man obigen Operator 'auseinanderziehen'? (Beweisen Sie!)
Verwenden Sie $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$ um zum Endergebnis zu kommen:

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi$$

$\boxed{\text{Schwingungen gleicher Frequenz addieren sich wie Vektoren} \rightarrow \text{Zeigerdiagramm}}$

Vielstrahlinterferenz – Interferenz am Beugungsgitter



In nebenstehender Abbildung überlagern sich im Zielpunkt in Richtung θ p Schwingungen der Frequenz ω, wobei sich 2 nebeneinanderliegende Strahlen mit dem Phaenswinkel δ unterscheiden. Im Zielpunkt ergibt sich folgende Interferenz:

$$y_R(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_p(t)$$

$$y_R(t) = Ae^{i\omega t} + Ae^{i(\omega t+\delta)} + Ae^{i(\omega t+2\delta)} + \ldots + Ae^{i(\omega t+(p-1)\delta)}$$

$$y_R(t) = Ae^{i\omega t}\sum_{k=1}^{p} e^{i(k-1)\delta}$$

Um welche Reihe handelt es sich? Geben Sie die Parameter an (b_1, q und n) und zeige:

$$y_R(t) = Ae^{i\omega t}\,\frac{1-e^{ip\delta}}{1-e^{i\delta}}$$

Nun zerlegt man die 1 im Bruch (sowohl im Zähler als auch im Nenner) nach dem Muster:

$$1 = e^{i\frac{\delta}{2}} \cdot e^{-i\frac{\delta}{2}}$$

das ergibt

$$y_R(t) = Ae^{i\omega t}\;\frac{e^{i\frac{p\delta}{2}} \cdot e^{-i\frac{p\delta}{2}} - e^{i\frac{p\delta}{2}} \cdot e^{i\frac{p\delta}{2}}}{e^{i\frac{\delta}{2}} \cdot e^{-i\frac{\delta}{2}} - e^{i\frac{\delta}{2}} \cdot e^{i\frac{\delta}{2}}}$$

in Zähler und Nenner gleichen Faktor herausheben und die Formel anwenden:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = -2i\sin\theta$$

und wir landen beim Endresultat:

$$y_R(t) = A\,\underbrace{e^{i\omega t} \cdot e^{-i\frac{(p-1)\delta}{2}}}_{Betrag=1}\;\frac{\sin\frac{p\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

und da uns nur der Betrag der resultierenden Schwingung interessiert:

$$A_R = A \cdot \frac{\sin\frac{p\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

die Umrechnung Phasenwinkel-Gangunterschied ($d =$ Gitterkonstante) macht man mit

$$2\pi \to \lambda \qquad \textit{daraus resultiert:} \qquad \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \to d\sin\theta$$

damit ist man bei der Endformel:

$$\boxed{A_R(\theta) = A \cdot \frac{\sin(\frac{p\pi d\sin\theta}{\lambda})}{\sin(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda})} \qquad (*)}$$

Berechne $A_R(0)$ mit L'Hospital (oder Taylorentwicklung im Ursprung)! Fertige Graphen von $A_R(\theta)$ für verschiedene Werte der Parameter an!! Einige Graphen sind im Anhang dargestellt!

Das INTERFERENZRADAR

Bis jetzt haben wir hergeleitet:

1.
$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi \tag{1}$$

2. Durch Mehrstrahlinterferenz ändert sich nichts an der Lage des Maximums – es wird nur „schärfer“

Was ist, wenn wir den Phasenwinkel der 2.-ten Antenne um δ verzögern? Der gesamte Phasenwinkel setzt sich jetzt zusammen:

$$\varphi = \delta + \tfrac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta \tag{2}$$

der letzte Term stammt aus der Richtungsänderung gegenüber der Achse. .
Wenn wir jetzt (2) in (1) einsetzen mit der Vereinfachung $A_1 = A_2 = A$ und $d = \lambda$ ergibt sich

$$A_R^2(\theta) = 2A^2(1 + \cos(\delta + 2\pi\sin\theta)) \tag{3}$$

Bei welchem Winkel θ ist nun $A_R^2(\theta)$ maximal? Antwort: Das Argument des Cosinus muss verschwinden! Die Rechnung führt auf

$$\theta_{max}(\delta) = \arcsin(-\tfrac{\delta}{2\pi}) \tag{4}$$

also lässt sich θ (die Lage des Interferenzmaximums) mit δ (Phasenverzögerung) verändern!
Zeichne den Graph von (4) und diskutiere seine Bedeutung!

Abbildung: Planar Array Radar in Alaska

ANHANG: Graphen für (*)

$$A_R(\theta)^2 \quad mit \quad A=1, \quad d=0,01\,mm, \quad \lambda = 6\cdot 10^{-7}\,m$$

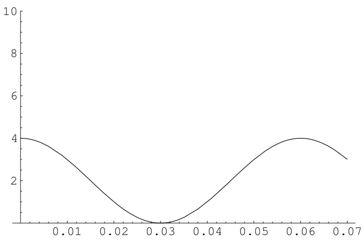


Abbildung 1: $p=2$

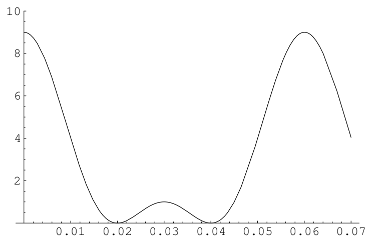


Abbildung 2: $p=3$

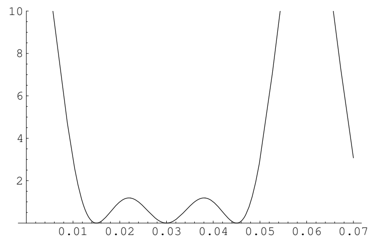


Abbildung 3: $p=4$

Hier derselbe Graph mit verschiedener y-Skalierung

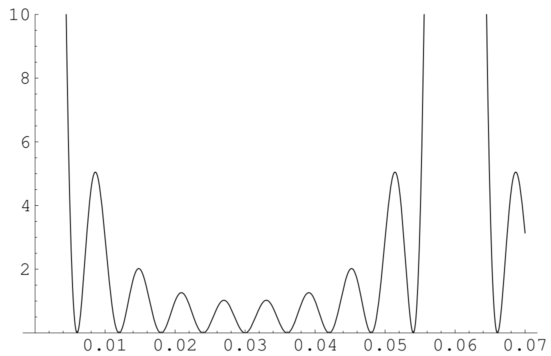


Abbildung 4: $p=10$

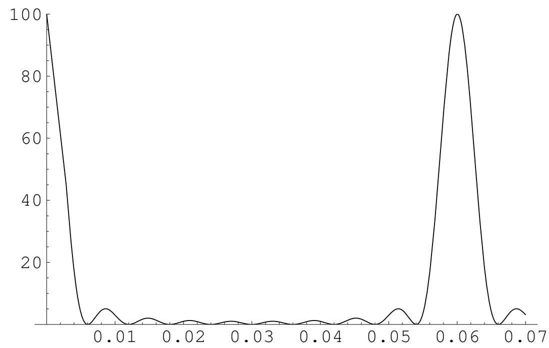


Abbildung 5: $p=10$