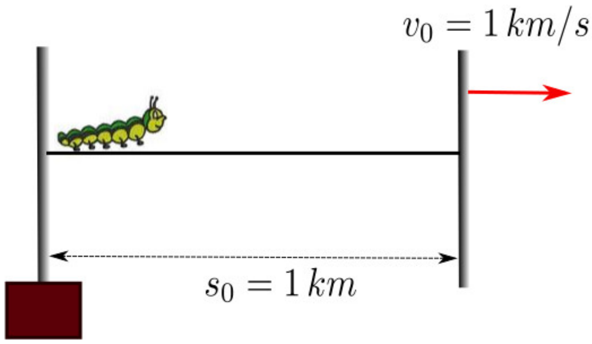
Die Raupe und die harmonische Reihe

Abstract: Im Mittelpunkt stehen Konvergenzbetrachtungen der harmonischen Reihe:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \,?$$

Eine unwahrscheinliche Geschichte: Eine Raupe stößt auf ein 1 km langes Gummiband. Die Raupe selbst hat eine Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde. Sie versucht das Gummiband zu "überqueren" - leider dehnt ein "böser Geist" das Gummiband pro Sekunde um 1 km. Kann es die Raupe trotzdem schaffen das andere Ende zu erreichen?



".... auf dem langen Marsch"

Lösung: Wir vereinfachen den Vorgang des Dehnens: Die Raupe krabbelt 1 Sekunde - dann wird instantan gedehnt! Die Raupe schafft also in der ersten Sekunde 1 cm von 100 000. In der zweiten Sekunde 1 cm von 200 000 cm, usw. also

$$\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \frac{1}{400000} + \ldots = 1$$

bzw.

$$\frac{1}{100000}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 100000 = 10^5}$$

Die letzte Gleichung kann nur dann eine Lösung haben, wenn die harmonische Reihe divergiert oder einen größeren Grenzwert als 100000 hat! Wir spielen mit einem CAS wie z.B. wxMaxima ein bisschen mit der Summe:

```
sum(1/i, i, 1, 10^6), numer;   liefert   14.39272672286499
```

schaut nach "hohem" Grenzwert oder Divergenz aus - was nun?

Beweis für die Divergenz: Wir verwenden die "reductio ad absurdum" mit der Annahme

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty} H_n = H = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty} H_{2n}$$

daraus folgt, dass gelten muss

$$\lim_{n\to\infty} H_{2n} - \lim_{n\to\infty} H_n = H - H = 0$$

andererseits gilt aber auch

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

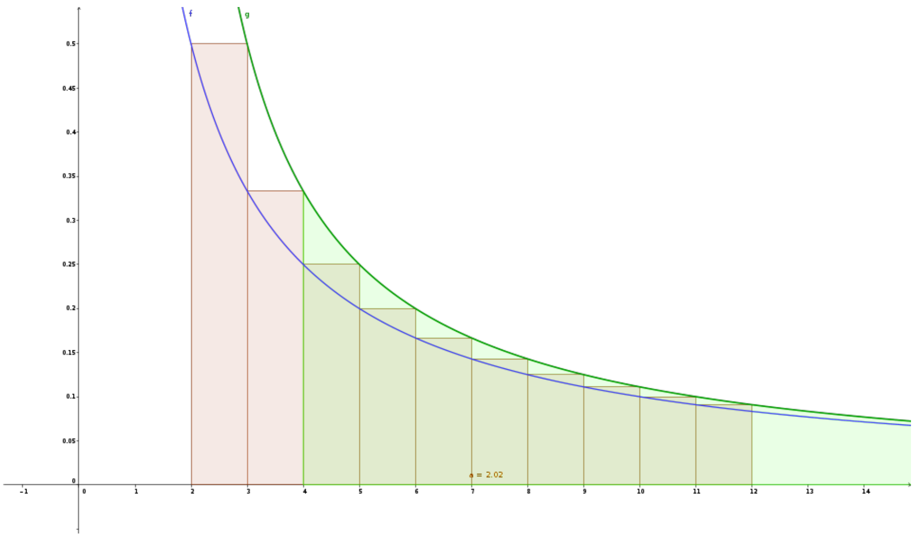
d.h. der Grenzwert ist sicher größer oder gleich$\frac{1}{2}$ und verschwindet nicht wie oben behauptet – **ein Widerspruch! Die Annahme der Konvergenz ist falsch!**

Also halten wir fest

$$\boxed{\sum_{i=1}^{x}\frac{1}{i} > 100000}$$

hat unendlich viele Lösungen - und von dieser Lösungsmenge suchen wir die kleinste. Wie aber finden wir sie?

Wir stellen $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ als Histogramm dar - uns interessiert also der Flächeninhalt **aller** Rechtecke! Aber diese Rechtecke sind ja Obersumme bzw. Untersumme von Funktionen. Sie sind von $f(x) = \frac{1}{x}$ die Obersumme und von $g(x) = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$die Untersumme. Leicht kann man sich in Geogebra davon überzeugen! Die ersten paar Reihenglieder können wir summieren, um den Fehler klein zu halten (hier in der Zeichnung die ersten 3 - aber natürlich werden wir diese Zahl dann größer wählen!)



geogebra: `f(x)=1/x Eingabe g(x)=f(x-1) Eingabe Obersumme[f, 2, 10, 8] Eingabe`

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\int\limits_{4}^{N} f(x)\,dx < \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\int\limits_{4}^{N} g(x)\,dx$$

statt den ersten 3 Reihengliedern können wir die ersten N_0 nehmen und mit $g(x) = f(x-1)$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{N_0}\frac{1}{i}+\int\limits_{N_0+1}^{N} f(x)\,dx < \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} < \sum_{i=1}^{N_0}\frac{1}{i}+\int\limits_{N_0+2}^{N+1} f(x)\,dx$$

einsetzen der Stammfunktion und für $N_0 = 10^6$ (weil da haben wir das Ergebnis schon berechnet) ergibt:

$$14,3927\ldots+\ln N-\ln(N_0+1) < \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} < 14,3927\ldots+\ln(N+1)-\ln(N_0+2)$$

eingesetzt für die Logarithmen ergibt

$$\underbrace{0,5772151649012152}_{a}+\ln N < \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} < \underbrace{0,5772141649027152}_{b}+\ln(N+1)$$

unsere Näherungen eingesetzt führt auf die Gleichungen

$$\ln N = 10^5 - a \qquad bzw. \qquad \ln(N+1) = 10^5 - b$$

in Anbetracht der Größe der Zahl können wir a und b vernachlässigen:

$$N \approx \exp(10^5)$$

um uns besser vorstellen zu können, wo die Zahl im Dezimalsystem zu finden ist, logarithmieren wir mit dem Zehnerlogarithmus

$$\lg N \approx 10^5 \cdot \lg e \approx \frac{10^5}{\ln 10} \approx 43430$$

also

$$\boxed{N \approx 10^{43430}}$$

Nach N Sekunden erreicht die Raupe das Ziel - doch was sollen wir uns unter dieser Zeitspanne vorstellen? Vergleichen wir das mit dem Alter unseres Universums A: 20 Mrd. Erdjahre - rechnen wir in Sekunden um :

$$A \approx 20\cdot 10^9 \cdot 365,249 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 6,3 \cdot 10^{17}$$

Also ein wirklich langer Marsch!