Differentialrechnung ohne Grenzwerte

Vor einigen Monaten stieß ich bei einem Youtube-Video auf die Differentialrechnung von Lagrange - diese bezieht sich zwar nur auf Polynome, aber das bemerkenswerte daran ist, dass man weder Grenzwerte braucht noch Regeln über die Differentialrechnung - die "Taylorreihe" für das Polynom ergibt sich ganz von selbst.

Außerdem so eine Einschränkung ist das ja nicht, da sich ja nach dem Satz von Weierstrass jede stetige Funktion in einem Intervall beliebig genau durch ein Polynom annähern lässt!

Der Grundgedanke

Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ ein Polynom n-ten Grades mit $a_i \in \mathbb{R}$. Wir verschieben jetzt p um r-Einheiten nach links

$$p_r(x) = p(x+r) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,(x+r)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} \binom{k}{i} x^k\, r^{i-k}$$

wobei die Potenzen expandiert und nach den Exponenten von x geordnet werden. p_r wird jetzt wieder r-Einheiten nach rechts verschoben, sodass sich natürlich wieder das ursprüngliche p ergibt:

$$p(x) = p_r(x-r) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} \binom{k}{i} (x-r)^k\, r^{i-k}$$

wobei letztes Polynom nicht mehr expandiert wird (wozu auch - wir wissen was herauskommt!)
Wir haben also $p(x)$ als Ausdruck einer beliebigen "Nachbarstelle" r ausgedrückt. Berechnet man mit obigen Ausdruck $p(r)$ verschwinden in der zweiten Summe alle Summanden außer $k = 0$ damit ergibt sich

$$p(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, r^i$$

- was nicht verwunderlich ist.
Ist x in der Nähe von r, gilt insbesondere $|x-r| < 1$, dann werden die Ausdrücke $(x-r)^k$ immer unbedeutender. Man kann sich also obige Darstellung von p in der Nähe von r nach Größenordung gereiht denken!

Folgendes Beispiel in *wxMaxima* soll das verdeutlichen :

Ein Beispiel

```
(%i1) p(x):=2*x^3+3*x^2-12*x+2;
```

(%o1) $\mathrm{p}(x) := 2 - 12 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3$

```
(%i3) s(x):=ratsimp(expand(p(x+r)))$  display(s(x))$
```

$$\mathrm{s}(x) = 2 \cdot x^3 + (3 + 6 \cdot r) \cdot x^2 + \left(-12 + 6 \cdot r + 6 \cdot r^2\right) \cdot x + 2 \cdot r^3 + 3 \cdot r^2 - 12 \cdot r + 2$$

$p(x)$ in neuer Schreibweise; Beachte, dass $\lim_{x \to r} p(x)$ leicht zum Ausführen ist!

```
(%i5) p_neu(x):=subst(x-r,x,s(x))$    display(p_neu(x))$
```

$$\boxed{\mathrm{p}(x) = 2 \cdot (x-r)^3 + (3 + 6 \cdot r) \cdot (x-r)^2 + \left(-12 + 6 \cdot r + 6 \cdot r^2\right) \cdot (x-r) + \overbrace{2 \cdot r^3 + 3 \cdot r^2 - 12 \cdot r + 2}^{p(r)}}$$

Nur die linearen Terme in $(x-r)$ ausmultipliziert!

```
(%i6)  h_1(x):=(-12+6*r+6*r^2)*(x-r)+2*r^3+3*r^2-12*r+2$
(%i8)  p_1(x):=ratsimp(h_1(x))$ display(p_1(x))$
```

$$\mathrm{p\_1}(x) = \left(-12+6\cdot r+6\cdot r^2\right)\cdot x - 4\cdot r^3 - 3\cdot r^2 + 2$$

Nur bis zu den quadratischen Termen (Kegelschnitte - conics) - ausmultipliziert!

```
(%i9)  h_2(x):=(3+6*r)*(x-r)^2+(-12+6*r+6*r^2)*(x-r)+2*r^3+3*r^2-12*r+2$
(%i11) p_2(x):=ratsimp(h_2(x))$  display(p_2(x))$
```

$$\mathrm{p\_2}(x) = (3+6\cdot r)\cdot x^2 + \left(-12-6\cdot r^2\right)\cdot x + 2\cdot r^3 + 2$$

Wir wählen eine spezielle Stelle: r=-1

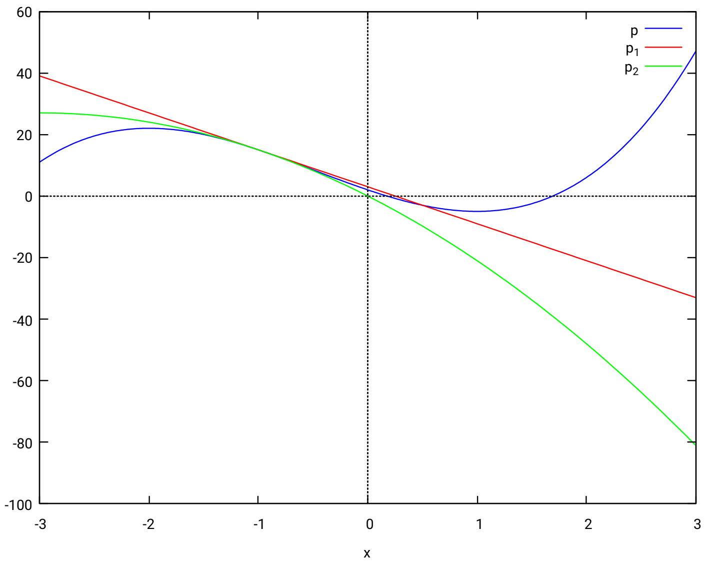
```
(%i12) r:-1$
(%i13) p_1(x);
```

(%o13) $3-12\cdot x$

```
(%i14) p_2(x);
```

(%o14) $-3\cdot x^2-18\cdot x$

```
(%i15) plot2d([p,p_1,p_2],[x,-3,3])$
```



Wichtig ist die Ausgabe von (%i5). Klar erkennt man wieder $p(x=r) = 2\cdot r^3 + 3\cdot r^2 - 12\cdot r + 2 = p(r)$

Aber man kann $p(x)$ auch schreiben als

$$p(x) = D_3(r)(x-r)^3 + D_2(r)(x-r)^2 + D_1(r)(x-r) + D_0(r) = \sum_{i=0}^{n} D_i(r)\,(x-r)^i \tag{1}$$

Welche Bedeutung haben die einzelnen $D_i(r)$-Funktionen? $D_0(r) = p(r)$ wie man durch einfaches Einsetzen sehen kann. Bringen wir $D_0(r) = p(r)$ auf die andere Seite und dividieren durch $x-r$ ergibt sich die Gleichung

$$\frac{p(x)-p(r)}{x-r} = D_3(r)(x-r)^2 + D_2(r)(x-r) + D_1(r) \quad \Big| \quad \lim_{x\to r} \text{ auf beiden Seiten ergibt}$$

$$\lim_{x\to r} \frac{p(x)-p(r)}{x-r} = p'(r) = D_1(r)$$

Wir können auch (1) auf jeder Seite differenzieren und gehen vor wie oben, um ein Ergebnis für D_2 zu erhalten

$$\frac{p'(x)-p'(r)}{x-r} = D_3(r)3\,(x-r) + 2\,D_2(r) \quad \Big| \quad \lim_{x\to r} \text{ auf beiden Seiten ergibt} \quad D_2(r) = \frac{p''(r)}{2}$$

Man sieht leicht, dass sich allgemein ergibt

$$D_i(r) = \frac{p^{(i)}(r)}{i!}$$

Die $D_i(r)$ sind also die „Taylorkoeffizienten". Zur Erinnerung Taylor für Polynome vom Grad n:

$$p(r+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(r)}{i!} h^i \quad \text{mit } r+h=x \text{ folgt}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{p^{(i)}(r)}{i!}}_{D_i(r)} (x-r)^i$$

Beachte : Die $D_i(r)$ von Lagrange sind leichter zu handhaben als die Ableitungen, da die Fakultät bereits „integriert" ist - damit ergeben sich i.a. kleinere Zahlen.

Auch verschiedene Ableitungsregeln lassen sich leicht zeigen. Hier am Beispiel der Produktregel:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} D_{i,p}(r)\,(x-r)^i \quad \text{und} \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} D_{i,q}(r)\,(x-r)^i \quad \Rightarrow$$

$$p(x)\cdot q(x) = D_{0,p}D_{0,q} + \underbrace{(D_{0,p}D_{1,q} + D_{0,q}D_{1,p})}_{D_{1,pq}}(x-r) + \dots$$

Da wir D_1 mit $\dfrac{d}{dx}$ identifizert haben, ergibt sich:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(pq) = p\frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dx}\,q}$$