

Zykloide

Abstract:

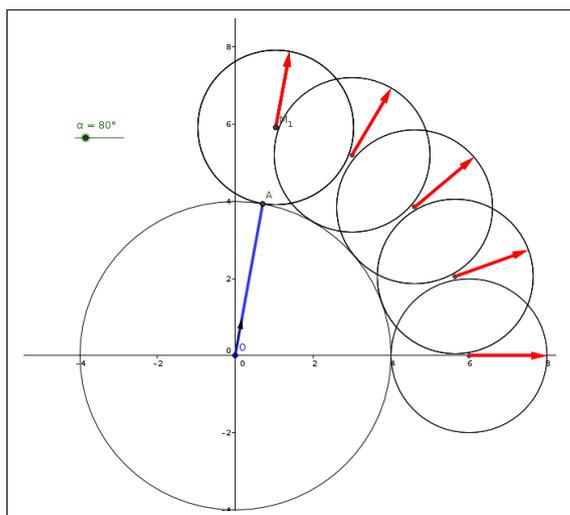
Herleitung der Formeln für Epizykloide (Kreis rollt außen auf Kreis) und Hypozykloide (Kreis rollt innen auf Kreis). Benötigt (zumindest von Vorteil) für die Durcharbeitung dieses Schriftstücks ist das Programm *Geogebra*. Am Mittelpunkt des abrollenden Kreises sei noch eine mitrotierende "Stange" angebracht. Damit stehen 3 frei wählbare Parameter zur Verfügung:

Kreis k_2 mit Radius r rollt auf k_1 mit Radius R ab. Länge der "Stange" ist ρ

Bevor wir uns mit dem "Rollen" beschäftigen, machen wir es etwas einfacher - wir beschäftigen uns mit

Gleiten auf einem Kreis

Konzentrieren wir uns vorerst auf den Fall ein Kreis k_2 gleitet außen auf einen anderen Kreis k_1 . Auf k_2 befindet sich ein Objekt - dies wird durch den roten Vektor veranschaulicht. Denken Sie sich eine Münze mit einer Zahl oder einem "Kopf" darauf. Damit keine Rollbewegung im Spiel ist fixieren wir beim Gleiten k_2 mit einer blauen Stange! Hier das [Geogebra Arbeitsblatt](#) - mit dem Schieberegler können Sie den äußeren Kreis gleiten lassen!



Halten wir fest: Während in Bezug auf ein mitrotierendes Bezugssystem K_r die Position des Objekts (roter Vektor) unverändert bleibt, führt es im "Zeichenblattsystem" auch eine Drehung aus - und zwar um den gleichen Winkel. Die neue Lage von k_2 ergibt sich also aus einer Translation **plus** einer Drehung - und das **ohne** Rollen. Dasselbe gilt natürlich auch für einen Kreis k_3 , der innen gleitet: im Arbeitsblatt M_2 und k_3 auf sichtbar schalten. Wer Lust hat kann auch wieder einen Vektor als "Objekt" einzeichnen.

Es sei

$$\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{der Einheitsvektor in Richtung } \alpha$$

Ein Punkt P am Spitzenpunkt des roten Vektor hat dann die Koordinaten

$$\vec{p} = \vec{m}_1 + \rho \vec{e}_\alpha = (R+r)\vec{e}_\alpha + \rho \vec{e}_\alpha$$

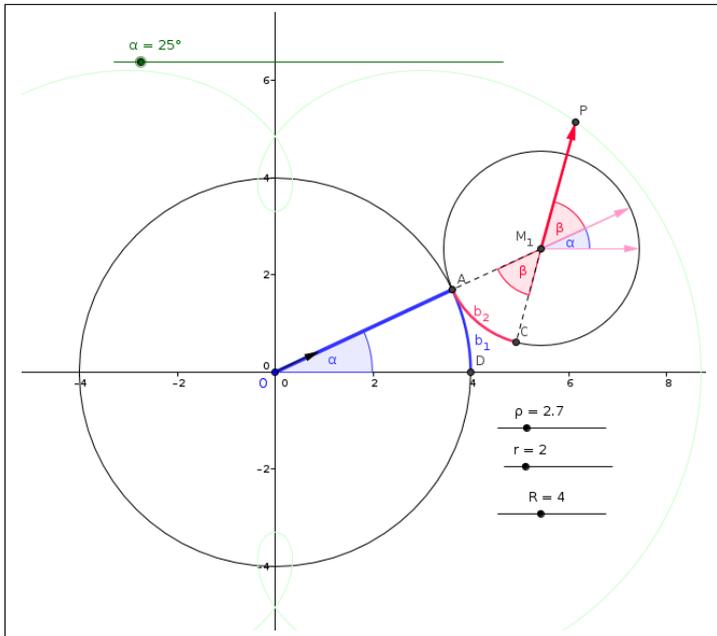
In unserem Geogebra-Arbeitsblatt heißt \vec{e}_α einfach v_0 . Damit können wir leicht die Probe machen, ob wir mit unserer Formel richtig liegen: Wir geben in der Befehlszeile ein:

$$P=(R+r)*v_0 + \rho*v_0$$

Schalten den Schieberegler für ρ sichtbar und betätigen den für α .

Jetzt zum

Kreis rollt auf Kreis - außen: Epizykloide



Beim Rollen müssen die zurückgelegten Strecken gleich sein. Es muss also gelten

$$b_1 = b_2 \Rightarrow R\alpha = r\beta \Rightarrow \beta = \frac{R}{r}\alpha$$

Schauen wir uns die "roten" Vektoren an: waagrecht war die Ausgangsrichtung, um α gedreht ergibt sich allein durch das Gleiten, dazu kommt jetzt eine Drehung um β .

Damit ergeben sich für den Punkt P folgende Koordinaten

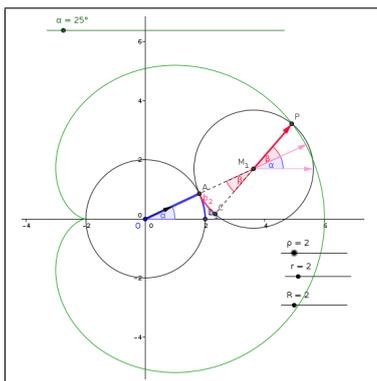
$$P = M_1 + \rho \vec{e}_{\alpha+\beta} \quad \text{bzw. ausgeschrieben}$$

$$P = (R+r) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \cos \left(\left(1 + \frac{R}{r}\right) \alpha \right) \\ \sin \left(\left(1 + \frac{R}{r}\right) \alpha \right) \end{pmatrix}$$

In folgendem [Geogebra Arbeitsblatt](#) ist diese Formel bereits als parametrisierte Kurve k (hellgrün) eingegeben - man braucht sie nur mehr sichtbar schalten. Wenn man außerdem die Spur von P einschaltet, lässt sich beim Betätigen des Schieberegler für α leicht die Richtigkeit obiger Formel bestätigen!

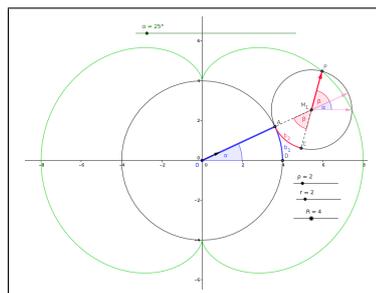
Mit dem Einstellen der Schieberegler für R , r und ρ lassen sich die verschiedensten *Epizykloiden* erzeugen!

Spezielle Epizykloiden

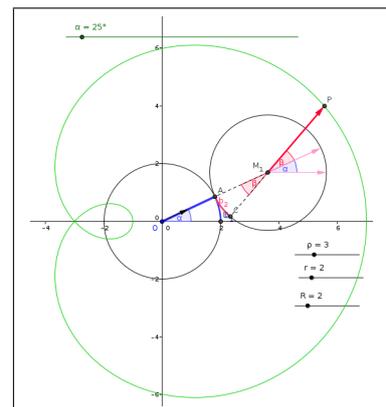


Kardoide: $R = r = \rho$
in Poloarkoordinaten (mit verschobenen KS):

$$r(\alpha) = R(1 + \cos(\alpha))$$

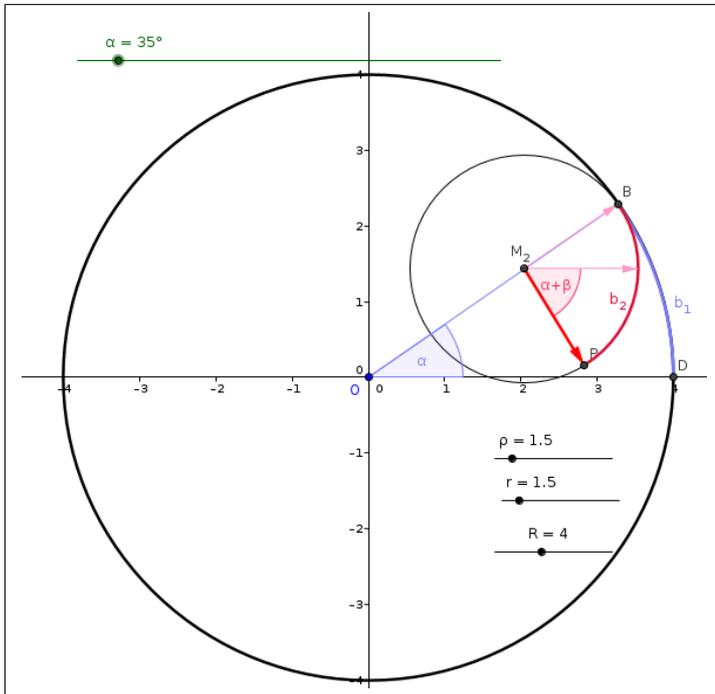


Nephroide: $r = \rho \quad R = 2r$



Pascal-Schnecke(Limaçon):
 $r = R \quad \rho > R$

Kreis rollt auf Kreis - innen: Hypozykloide



Beim Rollen müssen die zurückgelegten Strecken gleich sein. Es muss also gelten

$$b_1 = b_2 \Rightarrow R\alpha = r|\beta| \Rightarrow |\beta| = \frac{R}{r}\alpha$$

Allerdings ist der Effekt der Gleitbewegung jetzt der Rollbewegung entgegengerichtet! Schauen wir uns die "roten" Vektoren an: waagrecht war die Ausgangsrichtung, um α gedreht ergibt sich allein durch das Gleiten, dazu kommt jetzt eine neative Drehung um β . Damit ergeben sich für den Punkt P folgende Koordinaten

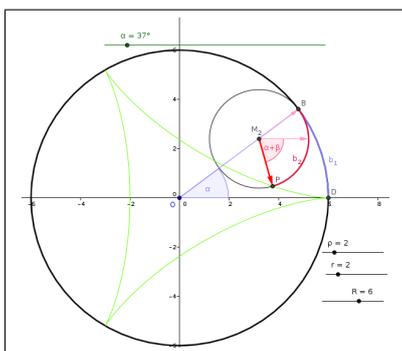
$$P = M_2 + \rho \vec{e}_{\alpha-|\beta|} \quad \text{bzw. ausgeschrieben}$$

$$P = (R - r) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \cos \left(\left(1 - \frac{R}{r}\right) \alpha \right) \\ \sin \left(\left(1 - \frac{R}{r}\right) \alpha \right) \end{pmatrix}$$

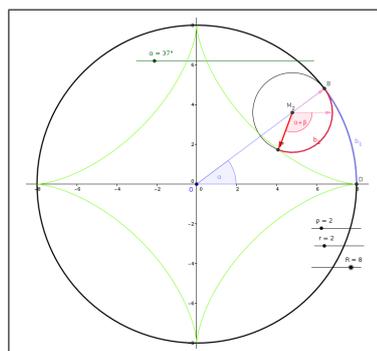
Hier wieder das [Geogebra Arbeitsblatt](#) dazu.

Spitzen ergeben sich für $\rho = r$ und die Anzahl der Spitzen $n = R/r$ - also wenn r ein Teiler von R ist.

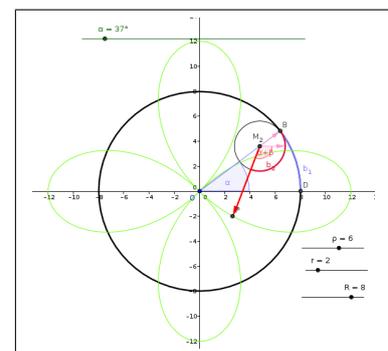
Spezielle Hypozykloiden



Tricuspoide



Astroide



Name unbekannt?