Das Kreuzprodukt

1. Das Kronecker-Symbol: $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls i=j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Seien $\vec{e}_i$ die kartesischen Einheitsvektoren. Begründe, dass gilt: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

3.
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j a_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_i a_i b_i$$

4. Levi-Civita-Symbol (Epsilon-Tensor):

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls i,j,k eine gerade Permutation von 1,2,3} \\ -1 & \text{falls i,j,k eine ungerade Permutation von 1,2,3} \\ 0 & \text{falls i,j,k nicht alle verschieden} \end{cases}$$

   eine andere Möglichkeit wäre mit den Standardbasisvektoren
   $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$:

$$\varepsilon_{ijk} := \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$$

5. Das Kreuzprodukt:

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})_i = c_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k}$$

6. Das Spatprodukt:

$$\boxed{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, c_i\, a_j\, b_k}$$

7. Epsilon-Delta-Verbindung:

$$\boxed{\sum_i \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\, \delta_{kn} - \delta_{jn}\, \delta_{km}}$$

   Beweis: Nimm für j, k, m, n einen Index an und zeige, dass l.S. und r.S. gleich sind! (Wieviele verschiedene Fälle gibt es?)
   Andere Möglichkeit statt "brute force": i ist in obiger Summe fixiert, damit das Ergebnis nicht verschwindet, gibt es nur mehr 2 Möglichkeiten:

   (a) $j = m$ und $k = n$ - dann haben die Permutationen dasselbe Vorzeichen, dass Ergebnis ist positiv oder

   (b) $j = n$ und $k = m$ - dann haben die Permutationen verschiedenes Vorzeichen, dass Ergebnis ist negativ

8. Wichtige Eigenschaften des Kreuzprodukts ('cross product'):

   - $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \lambda\vec{b})$

- $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$$\sum_i a_i \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_i\;\, a_j\, b_k$$

  mit $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ folgt die Behauptung!

- $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ analog oben!
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$$\sum_i \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \sum_{m,n} \varepsilon_{imn}\, a_m\, b_n = \sum_i a_i^2\, b_i^2 - \left(\sum_i a_i b_i\right) \left(\sum_j a_j b_j\right)$$

$$\sum_{i,j,k,m,n} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn}\, a_j\, b_k\, a_m\, b_n = \sum_i a_i^2\, b_i^2 - \sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j$$

  mit der obigen epsilon-delta Verbindung folgt die Behauptung!

Anwendungen von Kreuz- und Skalarprodukt

1. Fläche eine Parallelogramms oder Dreiecks mit Aufspannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
$$A_{\#} = |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad\qquad A_{\triangle} = \frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{b}|$$

2. Volumen eine Parallelepipeds (Aufspannvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, falls kein 'Rechtssystem' dann Betrag nehmen):
$$V_{\#} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$
Begründung: die obige Formel läuft auf „Höhe mal Grundfläche“ hinaus!
Volumen einer Pyramide: $1/3 \cdot V_{\#}$
Volumen eines schiefen Prismas mit dreieckiger Grundfläche: $1/2 \cdot V_{\#}$
Volumen eines Tetraeders: $1/3 \cdot 1/2 \cdot V_{\#}$

3. Bringe die Ebenengleichung $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$ auf Normalvektorform!
Lösung: Multipliziere obige Gleichung skalar mit $(\vec{a} \times \vec{b})$!

4. Abstand eines Punktes P von Gerader $g: \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\,\vec{a}$:
Beachte: $|(\vec{a}_0 \times (\vec{p} - \vec{x}_1))|$ ist die Fläche eines Parallelogramms $= 1 \cdot d(P,g)$
Falls man den Fußpunkt F benötigt ist man mit der Projektion von $(\vec{p} - \vec{x}_1)$ auf g besser dran:
$$\vec{f} = \vec{x}_1 + \left(\underbrace{(\vec{p} - \vec{x}_1) \cdot \vec{a}_0}_{Projektionslänge} \right) \vec{a}_0$$

5. Abstand eines Punktes P von einer Ebene $\varepsilon: \quad \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1) = 0$:
$$d(P,\varepsilon) = (\vec{p} - \vec{x}_1) \cdot \vec{n}_0$$
Beachte: $d(P,\varepsilon) > 0$ falls P sich im selben Halbraum befindet wohin $\vec{n}_0$ zeigt. Im andern Fall ist noch der Betrag zu nehmen. Damit ergibt sich für den Fußpunkt F folgende Formel:
$$\vec{f} = \vec{p} - d(P,\varepsilon)\vec{n}_0$$

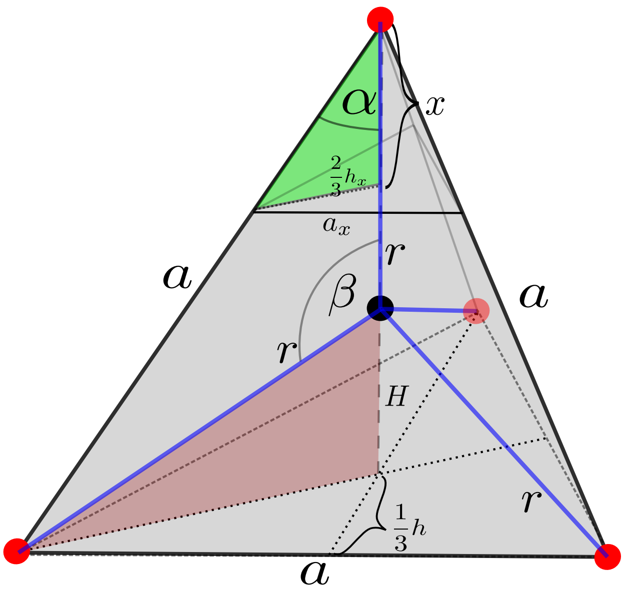
6. Sind 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear $\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$
Sind 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal $\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$

7. Abstand zweier windschiefer Geraden $g_1: \quad \vec{x}_{g_1} = \vec{x}_1 + \lambda\,\vec{a} \qquad g_2: \quad \vec{x}_{g_2} = \vec{x}_2 + \mu\,\vec{b}$:
Lösung: der Verbindungsvektor $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ wird auf das „Gemeinlot“ $(\vec{a} \times \vec{b})$ projiziert:
$$d(g_1, g_2) = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0|$$
Benötigt man auch die Fußpunkte stellt man sich die Frage:
Wo ist der Verbindungsvektor der beiden Geraden $(\vec{x}_{g_2} - \vec{x}_{g_1})$ kollinear zum „Gemeinlot“ ?
$$(\vec{x}_{g_2} - \vec{x}_{g_1}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$
Beachte: dies sind 3 Gleichungen für λ und μ !

Beispiele

1. Zeige, dass die Vektoren $\vec{a} = (2|-3|1)$ und $\vec{b} = (-6|9|-3)$ kollinear sind durch
   - Lösung des Gleichungssystems: $\lambda\,\vec{a} = \vec{b}$
   - Ermittlung des Kreuzprodukts
2. Zeige, dass die Vektoren $\vec{a} = (2|0|1)$, $\vec{b} = (-6|9|-3)$ und $\vec{c} = (-2|9|1)$ komplanar sind durch
   - Lösung des Gleichungssystems: $\vec{a} = \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c}$
   - Ermittlung des Spatprodukts
3. Berechne $d(P, \varepsilon)$ und den Fußpunkt: $P(4|-4|7) \qquad \varepsilon: \ 3x - 2y + 6z = 13$
4. Ermittle die Gleichungen der Parallelebenen zu $\varepsilon: \ 2x + y + 2z = 7$ im Abstand 1, 2, 3, ...
5. Berechne die Normalvektorform der Ebene durch $A(1|1|9)$, $B(2|0|1)$, $C(3|1|3)$
6. Berechne $d(P, g)$ und den Fußpunkt:
$$P(4|2|2) \qquad g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
7. Berechne $d(g_1, g_2)$ und die Fußpunkte:
$$g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$
8. Gleichung der Ebene ε durch P, die parallel zu g und h ist: P$(-4|2|3)$ und
$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$
9. regelmäßiger Tetraeder(Methan) mit Seitenlänge a liegt im Koordinatensystem: ein Eckpunkt im Ursprung, eine Kante positive x-Achse, eine Fläche π_1 und alle z-Koordinaten der Eckpunkte sind größer oder gleich Null. Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte an und berechne das Volumen. Würde man den Tetraeder mit Wasser füllen (er "steht" dabei auf der Grundfläche) – nach welcher Wasserstandshöhe $H_{1/2}$ wäre das halbe Volumen erreicht? Berechne $H_{1/2}$ in Prozenten der Tetraederhöhe. (Methan: Welche Koordinaten hat das C-Atom? Wie groß sind die Bindungswinkel?)

   Berechne die Antwort obiger Fragen mit Trigonometrie und mit Vektorrechnung!



trigonometrisch

- Grunddaten:

$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow h \qquad H^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = a^2 \Rightarrow H \qquad V = \frac{1}{3}G \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ahH$$

- Bindungswinkel β (rotes Dreieck):

$$r^2 = (H-r)^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \Rightarrow r \qquad a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\beta \Rightarrow \beta$$

- Berechnung von $H_{1/2}$ (grünes Dreieck):

$$\frac{2/3h_x}{x} = \frac{2/3h}{H} \quad \text{Grunddaten einsetzen ergibt: } a_x = \gamma \cdot x$$

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{3}G_x \cdot x_{1/2} \quad \text{mit} \quad G_x = \frac{a_x^2}{4}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad H_{1/2} = H - x_{1/2}$$

mit Vektoren

- Eckpunktskoordinaten und Volumen:

$$H_1(0|0|0) \quad H_2(a|0|0) \quad H_3\left(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}\sqrt{3}|0\right) \quad H_4\left(\frac{a}{2}|\frac{a}{6}\sqrt{3}|H\right) \quad \text{wobei} \quad \overrightarrow{H_1H_4}^2 = a^2 \Rightarrow H = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$V = \frac{1}{6}(\overrightarrow{H_2} \times \overrightarrow{H_3}) \cdot \overrightarrow{H_4}$$

- Lage des C-Atoms:

$$C\left(\frac{a}{2}|\frac{a}{6}\sqrt{3}|H-r\right) \quad \text{und} \quad \left|\overrightarrow{CH_4}\right| = \left|\overrightarrow{CH_1}\right| \Rightarrow r \Rightarrow C$$

- Bindungswinkel:

$$\left(\overrightarrow{CH_4}\right)_0 \cdot \left(\overrightarrow{CH_1}\right)_0 = \cos\beta$$

- Berechnung von $H_{1/2}$:

$$\frac{1}{6}(\lambda\overrightarrow{H_2} \times \lambda\overrightarrow{H_3}) \cdot \lambda\overrightarrow{H_4} = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \lambda^3 V = \frac{V}{2} \Rightarrow \lambda$$

Sei $\vec{k}$ der kartesische Einheitsbasisvektor in z-Richtung, dann gilt:

$$\lambda\overrightarrow{H_4H_1} \cdot (-\vec{k}) = H - H_{1/2} \Rightarrow \lambda H = H - H_{1/2} \Rightarrow H_{1/2} = H\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$